Mathematik

Stefan G. Beck *

3. Dezember 2021

Düsseldorf 2021 / geschrieben in LaTeX

*Danke an alle die mich weiter gebracht haben

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Symbole

1.1 Gleichheitszeichen

Symbol	Verwendung	Bedeutung
$=$	a $=$ b	a ist gleich b
$\neq$	a $\neq$ b	a ist nicht gleich b
$\equiv$	a $\equiv$ b	a ist identisch mit b
$\approx$	a $\approx$ b	a ist ungefähr gleich b
$\sim$	a $\sim$ b	a ist proportional zu b
$\propto$	a $\propto$ b	a ist proportional zu b
$\hat{=}$	a $\hat{=}$ b	a entspricht b
$\simeq$	a $\simeq$ b	a ist asymptotisch gleich b

Tabelle 1: Gleichheitszeichen

1.2 Vergleichszeichen

Symbol	Verwendung	Bedeutung
$<$	a $<$ b	a ist kleiner b
$>$	a $>$ b	a ist größer b
$\leq$	a $\leq$ b	a ist kleiner gleich b
$\geq$	a $\geq$ b	a ist größer gleich b
$\ll$	a $\ll$ b	a ist viel kleiner als b
$\gg$	a $\gg$ b	a ist viel größer als b
$\ll$	a $\ll$ b	a ist viel kleiner als b
$\gg$	a $\gg$ b	a ist viel größer als b
$\lll$	a $\lll$ b	a ist sehr viel kleiner als b
$\ggg$	a $\ggg$ b	a ist sehr viel größer als b
$\lessgtr$	a $\lessgtr$ b	a ist kleiner oder größer als b
$\gtrless$	a $\gtrless$ b	a ist größer oder kleiner als b
$\prec$	a $\prec$ b	b wird gegenüber a strikt vorgezogen
$\succ$	a $\succ$ b	a wird gegenüber b strikt vorgezogen
$\preccurlyeq$	a $\preccurlyeq$ b	b wird a schwach vorgezogen bzw. b ist mind. so gut wie a
$\succcurlyeq$	a $\succcurlyeq$ b	a wird b schwach vorgezogen bzw. a ist mind. so gut wie b

Tabelle 2: Vergleichszeichen

1.3 Teilbarkeitszeichen

Symbol	Verwendung	Bedeutung
$\mid$	$a \mid b$	a teilt b
$\parallel$	$a \parallel b$	a teilt b exakt
$\nmid$	$a \nmid b$	a teilt b nicht
$\perp$	$a \perp b$	a und b sind teilerfremd
$\sqcap$	$a \sqcap b$	größter gemeinsamer Teiler von a und b
$\wedge$	$a \wedge b$	größter gemeinsamer Teiler von a und b
$\sqcup$	$a \sqcup b$	kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b
$\vee$	$a \vee b$	kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b
$\equiv$	$a \equiv b \mod m$	a und b sind kongruent modulo m

Tabelle 3: Teilbarkeit

2 Algebra

2.1 Grundlegende Regeln der Algebra

Die folgenden Gesetze beschreiben das Verhalten von Operatoren (+, -, *, /) und Ihren zugehörigen Operanden (a, b). Wichtig ist, dass nicht alle Gesetze für alle Operatoren gelten. Ausserdem ist zu beachten in welchem Zahlenkörper die Operation stattfindet, da die Regeln auch hier unterschiedliche Gültigkeit haben.

2.1.1 Kommutativgesetz

Die Operanden in einer Verknüpfung dürfen vertauscht werden.
$a + b = b + a$

2.1.2 Assoziativgesetz

Das Assoziativgesetz besagt, dass die Reihenfolge der Verknüpfungen keine Rolle spielt.
$a * (b * c) = (a * b) * c$

2.1.3 Distributivgesetz

$a * (b \pm c) = a * b \pm a * c$

2.2 Lineare Algebra

2.2.1 Vektor

In der Mathematik wird ein Vektor geschrieben als $\vec{v}$. Er kann aber auch als *Spaltenvektor* wie folgt geschrieben werden: $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Die Darstellung als Spaltenvektor ist insofern praktisch, da man sofort die Dimension des Vektors erkennt. Ausserdem ist diese Darstellung hilfreich, wenn man Details von unterschiedlichen Operationen mit Vektoren verdeutlichen will. Zum Beispiel Multiplikation von Vektoren mit Matrizen. Eine Vektor kann man sich vorstellen wie eine Pfeil in einem Koordinatensystem, dabei hat der Vektor seinen Anfang immer im Ursprung des Koordinatensystems und seine Spitze zeigt auf die Zielkoordinaten. Der obige Vektor $\vec{v}$ zeigt in einem 2-dimensionalen Koordinatensystem, also einem mit zwei Achsen x und y, auf die Koordinaten: x=a und y=b. Da der Vektor in einem 2-dimensionelen Koordinatensystem lebt, handelt es sich selber um einen 2-dimensionalen Vektor. Eine Vektor im 3-dimensionalen Raum ist folglich ein 3-dimenionaler Vektor.

2.2.2 Vektoren addieren

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$$

2.2.3 Vektoren subtrahieren

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c \\ b-d \end{bmatrix}$$

2.2.4 Skalar - Vektore mit einer Zahl multuiplizieren / dividieren

Wird ein Vektor mit einer Zahl (Slakar) multipliziert / dividiert: $i * \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a*i \\ b*i \end{bmatrix}$, so verändert er sich in seiner Länge. Diesen Vorgang nennt man Skalierung. Daher nennt man die Zahl, mit welcher der Vektor multipliziert / dividiert wird, auch Skalar.

2.2.5 Linearkombination (linear combination)

Eine Linearkombination ist die Kombination von Vektoren, wobei jeder Vektor mit einem Skalar multipliziert wird. $i * \vec{v} + j * \vec{w}$. Anderst ausgedrückt ist eine Linearkombination die Addition mehrerer skalierter Vektoren.

2.2.6 Lineare Hülle (span)

Alle möglichen Kombinationen einer Linearkombination $i * \vec{v} + j * \vec{w}$ nennt man die lineare Hülle (dieser Vektoren). Die lineare Hülle bildet somit den gesamten Raum ab, innerhalb dem diese Vektoren leben. Grafisch spannen zwei Vektoren in einem 3-dimensionalen Raum eine Fläche auf

2.2.7 Lineare Abhängigkeit

Ein Vektor $\vec{u}$ ist *linear abhängig* von $\vec{v}$ und $\vec{w}$, wenn $\vec{u}$ auf der linearen Hülle von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ liegt. $\vec{u} = i * \vec{v} + j * \vec{w}$

2.2.8 Lineare Unabhängigkeit

Ein Vektor $\vec{u}$ ist *linear unabhängig* von $\vec{v}$ und $\vec{w}$, wenn $\vec{u}$ *nicht* auf der linearen Hülle von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ liegt. $\vec{u} \neq i * \vec{v} + j * \vec{w}$

2.2.9 Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor hat die Länge 1 und bestimmt die Einheit in einem Koordinatensystem. Ein zweidimensionales Koordinatensystem hat zwei Einheitsvektoren. In den Meisten Fällen sind das $\hat{i}$ und $\hat{j}$.

2.2.10 Basis

Die Basis eines Vektorraums wird definiert durch ein Set von linear unabhängigen Vektoren.

2.3 Abstrakte Algebra

2.3.1 Algebraische Grundstrukturen

2.3.2 Gruppentheorie

2.3.3 Gruppen

Eine Gruppe ist die Verbindung einer Menge und einer Verknüpfung oder Operation.

2.3.3.1 Allgemeines Beispiel: Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ in Verbindung mit der Addition als Verknüpfung, bilden eine Gruppe

Eine Gruppe muss folgende Eigenschaften erfüllen:
Abgeschlossen
Die Verknüpfung zweier Elemente aus der Menge ergeben ein Element derselben Menge. Eine Addition zweier ganzer Zahlen ergibt erneut eine ganze Zahl. Die ganzen Zahlen sind unter der Addition abgeschlossen.

Assoziativ
Für alle Elemente der Menge gilt $(a+b)+c = a+(b+c)$ Die Reihenfolge der Ausführung der Verknüpfung is irrelevant.

Existenz eines neutralen Elements
Es gilt für jede Zahl der Menge: $0+a = a+0 = a$
Es existiert ein neutrales Element, verknüpft man dieses mit einem beliebigen Element der Menge ist das Ergebnis gleich dem Element.

Existenz eines inversen Elements
Für jedes Element a der Menge gibt es ein Element b, so dass gilt: $a+b = b+a = a$
Für jedes Element a gibt es eine inverses Element b. Wird a mit b verknüpft erhält man als Ergebnis 0.

Eine Gruppe verallgemeinert die Verbindung einer Menge und einer passenden Operation, welche diesen vier eigenschaften erfüllen.

Man schreibt formal: Eine Gruppe ist ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer Menge G und einer inneren zweistelligen Verknüpfung * auf G.

2.3.3.2 Definition

Es gelten folgende Gruppenaxiome:

- Abgeschlossenheit
  $\forall a, b \in G, \exists c \in G, a * b = c$
- Assoziativität:
  $(a * b) * c = a * (b * c)$
- neutrales Element
  (es gibt ein einziges) $\exists e \in G$ mit dem (für alle) $\forall a \in G$ gilt:
  $a * e = e * a = a$
- inverses Element
  es gibt für jedes $\forall a \in G$ ein einziges inverses Element für welches gilt:
  $a^{-1} \in G$ mit $a * a - 1 = a - 1 * a = e$

2.3.4 Halbgruppe

Eine Halbgruppe verhält sich wie eine normale Gruppe, nur dass für die Halbgruppe das Axiom der Abgeschlossenheit und der Assoziativität (siehe: Gruppe) erfüllt sein muss. Somit ist jede Gruppe auch eine Halbgruppe.